

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali. Najmanja jedinica bodova koja se dodjeljuje jest 1 bod.

Zadatak 1. (ukupno bodova: 11)

Srebrna šipka oblika cilindra uspravno je položena u visoku cilindričnu čašu površine baze 1 dm^2 . Čaša je zanemarive mase te ima zanemaru debljinu stijenke. Šipka ima površinu baze jednaku 9 cm^2 .

(a) Ako u čašu dolijemo 910 mL žive, šipka taman počne plutati u živi. Odredite visinu šipke.

(b) Ako čašu sa šipkom (bez ikakve žive) stavimo u veliku posudu s vodom, ona pluta. Koliki je volumen žive koju treba dodati u čašu kako bi se čaša tada toliko spustila u vodi da cijela šipka bude točno ispod razine vode (tako da se vrh šipke podudara s površinom vode)? Pretpostavite da je čaša puno viša od šipke te da voda u nju ne može ući.

Gustoće materijala su (u g/cm^3): srebro 10.5 , živa 13.5 , voda 1 . Zanemarite gustoću zraka.

Rješenje:

(a) Površina poprečnog presjeka kojega živa može zauzeti u čaši je jednaka površini njene baze umanjene za površinu šipke te iznosi 91 cm^2 . Kada dodamo 910 mL žive onda će dopirati do visine od 10 cm u čaši. **(1 bod za točnu visinu žive. 1 bod za ispravno baratanje mjernim jedinicama u cijelom zadatku, uskratiti ovaj bod ako je napravljena ikakva greška u pretvorbi ili korištenju mjernih jedinica u zadatku.)** To znači da srebro ukupno istisne volumen žive jednak

$$V_{\text{istisnute Hg}} = A_{\text{šipka}} h_{\text{Hg}} = 90 \text{ cm}^3.$$

To odgovara masi od **(1 bod za ispravno korištenje formule za gustoću)**

$$m_{\text{istisnute Hg}} = \rho_{\text{Hg}} V_{\text{istisnute Hg}} = 1215 \text{ g},$$

Što, po Arhimedovu zakonu mora upravo odgovarati masi šipke, odnosno njena je visina tada **(1 bod za poznavanje uzgona. 1 bod za točan zaključak o tome kako se mase šipke i istisnute žive odnose. 1 bod za točan rezultat za visinu šipke)**

$$h_{\text{šipka}} = \frac{m_{\text{šipka}}}{\rho_{\text{srebro}} A_{\text{šipka}}} = \frac{m_{\text{istisnute Hg}}}{\rho_{\text{srebro}} A_{\text{šipka}}} = 12.857 \text{ cm}.$$

(b) Kada je čaša uronjena do razine šipke, to znači da je ukupna gustoća svega u čaši točno jednaka gustoći vode. **(2 boda za zaključak za efektivnu gustoću čaše.)** Tada vrijedi **(1 bod točno izvedenu formulu)**

$$\rho_{\text{voda}} = \rho_{\text{čaša}} = \frac{M_{\text{Hg}} + m_{\text{šipka}}}{V_{\text{uronjene čaše}}} = \frac{\rho_{\text{Hg}} V_{\text{Hg}} + m_{\text{šipka}}}{A_{\text{čaša}} h_{\text{šipka}}},$$

pri čemu smo masu žive u ovom slučaju označili s velikim slovom da bi ju razlučili od one iz prvog dijela zadatka. Sređivanjem izraza dobivamo volumen žive (**1 bod uspješnu manipulaciju izrazom. 1 bod za točan rezultat za volumen.**)

$$V_{\text{Hg}} = \frac{1}{\rho_{\text{Hg}}} (\rho_{\text{voda}} A_{\text{čaja}} h_{\text{šipka}} - m_{\text{šipka}}) = 5.237 \text{ mL} = 5.237 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Zadatak 2. (ukupno bodova: 9)

Dana je horizontalna cilindrična cijev koja se postupno sužava prema svome jednom otvorenom kraju. Prvi dio cijevi ima radijus jednak 10 centimetara, drugi dio 7, a treći 5. Treći je dio cijevi otvoren te se njezin centar nalazi na visini od 1 metra od horizontalne podloge.

(a) Kolika je brzina kojom istječe voda iz cijevi, ako mlaz udari podlogu na udaljenosti od 90 centimetara od cijevi? Zanimarite širinu mlaza u odnosu na visinu cijevi i udaljenost od pada na podlogu.

(b) Ako na prvi i drugi dio cijevi spojimo visoke vertikalne cijevi, odredite kolika će biti visina stupaca vode prvom dijelu, mjereno od središta horizontalne cijevi, ako je u drugom visina 2 metra. Pretpostavite da se ukupni tlak u cijevi sastoji isključivo od dinamičkog i statičkog tlaka te da na visinu stupca u vertikalnim cijevima utječe samo potonji.

Rješenje:

(a) Riječ je o horizontalnom hicu te vrijedi da je domet D jednak **(2 boda za poznavanje formule za horizontalni hitac, uskratiti oba boda ako je ona napisano netočno bez ikakvog postupka izvođenja, a uskratiti samo 1 bod ako je ona izvedena, ali je napravljena greška u izvodu.)**

$$D = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

pri čemu su h početna visina te v_0 početna brzina. Uvrštavajući veličine koje su nam dane u zadatku dolazimo do početne brzine vode, koja je jednaka brzini vode u trećem dijelu cijevi v_3 **(1 bod za točan iznos brzine)**

$$v_0 = v_3 = D \sqrt{\frac{g}{2h}} = 1.9933 \text{ m/s}.$$

(b) S obzirom na to da tok mora biti očuvan, vrijedi **(1 bod za poznavanje toka)**

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_3 A_3 = v_3 r_3^2 \pi,$$

pri čemu smo indeksirali dijelove cijevi redom kako se spominju u zadatku. Dalje slijedi **(1 bod za formule za brzinu dobivene preko toka)**

$$v_1 = v_3 \frac{r_3^2}{r_1^2}, \quad v_2 = v_3 \frac{r_3^2}{r_2^2}.$$

Po napatku zadatka, iz visine stupca u drugoj cijevi h_2 možemo odmah dobiti statički tlak u tom dijelu

$$p_{\text{stat}, 2} = \rho g h_2,$$

Kako ukupni tlak mora biti očuvan, mora vrijediti **(1 bod za poznavanje ukupnog tlaka)**

$$p_{\text{stat}, 2} + p_{\text{din}, 2} = p_{\text{stat}, 1} + p_{\text{din}, 1},$$

iz čega možemo dobiti statički tlak u prvoj cijevi **(1 bod ukupno za poznavanje izraza za statički i dinamički tlak, ako je napravljena greška u formuli za jedan od tlakova uskratiti ovaj bod)**

$$p_{\text{stat}, 1} = \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2},$$

odnosno visinu stupca vode u vertikalnoj cijevi (**1 bod za uspješno izvedenu formulu za brzinu. 1 Bod za točan rezultat za visinu.**)

$$h_1 = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + v_3^2 \frac{r_3^4}{2g} \left(\frac{1}{r_2^4} - \frac{1}{r_1^4} \right) = 2.0401 \text{ m.}$$

Zadatak 3. (ukupno bodova: 8)

Promotrite Hooverovu branu koju ćemo modelirati kao polovicu cilindrične ljuske (dakle, oblik koji odgovara kvadru kojega se po jednoj njegovoj osi polukružno savije, odnosno obliku koji se dobije ako se, počevši od polovice cilindra, iz njega izdubi isti takav oblik, ali manjeg radijusa).

Uzmite da je, u najhladnijem dijelu godine, kada je temperatura 0 stupnja Celzijevih, manji polumjer takvog oblika jednak 100 metara, njegova debljina (što odgovara razlici većeg i manjeg polumjera) 90 metara te visina 220 metara.

Odredite volumen brane u hladnom dijelu godine. Odredite kolike su dimenzije brane u najtoplijem dijelu godine, kada je temperatura 40 stupnjeva Celzijevih te izračunajte koliki je tada volumen na dva načina: direktnim računom iz dimenzija u tom dijelu godine te kada koristite aproksimaciju linearne promjene volumena s temperaturom. Usporedite rezultate te komentirajte je li ta aproksimacija valjana (aproksimaciju smatramo valjanom ako je razlika manja od 5 %).

Pretpostavite da je linearni koeficijent širenja betona konstantan te da iznosi 10^{-5} 1/K. Pretpostavite da je cijela brana na istoj temperaturi.

Rješenje:

Za sve tri dimenzije brane, za koje ćemo mi odabrati manji radijus ($r = 100$ m), veći radijus ($R = 190$ m) te visinu ($h = 220$ m) vrijedi isti zakon termalne ekspanzije (**1 bod za poznavanje formule za termalnu ekspanziju**)

$$x = x_0 (1 + \alpha \Delta T) .$$

Razlika temperatura je 40 stupnjeva celzijevih (i kelvina, u ovom je slučaju svejedno koju jedinicu koristimo) pa je (**1 bod za točno određene sve dimenzije**)

$$r_1 = 100.04 \text{ m}, \quad R_1 = 190.076 \text{ m}, \quad h_1 = 220.088 \text{ m} .$$

Volumen brane će biti jednak razlici volumena dvaju polovica cilindra, odnosno (**1 bod za točnu formulu za ukupni volumen u kojoj se oduzimaju volumeni. 1 bod za točan iznos volumena u hladnom dijelu godine**) imamo da je u hladnom dijelu godine volumen jednak

$$V_{\text{uk}} = \frac{1}{2} (V_R - V_r) = \frac{1}{2} h \pi (R^2 - r^2) = 9019512.508 \text{ m}^3 .$$

Ako pak uvrstimo veličine koje smo izračunali za topliji dio godine, imamo (**1 bod za točan iznos volumena u toplijem dijelu godine dobiven direktnim računom**)

$$V_{\text{uk},1} = \frac{1}{2} (V_{R_1} - V_{r_1}) = \frac{1}{2} h_1 \pi (R_1^2 - r_1^2) = 9030340.253 \text{ m}^3 .$$

Alternativno, volumen možemo računati pomoću aproksimacije (**1 bod za ispravnu formulu za aproksimativan račun volumena pri termalnoj ekspanziji. 1 bod za točan iznos volumena u toplijem dijelu godine dobiven aproksimativnim računom**)

$$V_{\text{uk},1} = V_{\text{uk}} (1 + 3\alpha \Delta T) = 9030335.923 \text{ m}^3 .$$

Vidimo da se ovako izračunati volumeni odlično poklapaju, te je razlika daleko manja od 5 %. To je, naravno, posljedica činjenice da je faktor $\alpha \Delta T$ jako malen te da je to jedini uvjet

da aproksimacija bude valjana. Sama veličina predmeta koji se zagrijava ili hladi ne utječe na valjanost aproksimacije. **(1 bod za zaključak kako je aproksimacija valjana, neovisno o detaljima argumentiranja zašto, dokle god su ti argumenti logički valjani, makar se svodili na to da je numeričko odstupanje rezultata jako malo.)**

Zadatak 4. (ukupno bodova: 10)

Između dvaju identičnih spremnika oblika uspravnih cilindara i visine 10 metara, koji se nalaze na horizontalnoj podlozi u naftnoj rafineriji, prebacuje se sirova nafta. Razina nafte u prvom spremniku, mjerena od njegova dna, devet je metara, dok je razina nafte u drugom jednaka jedan metar. Odzračni ventil prvog spremnika je otvoren, tako da zrak atmosferskog tlaka uvijek ispunjava sav njegov volumen koji nije već ispunjen naftom. No, radnici su zaboravili otvoriti ventil na drugom spremniku tako da je u njemu zarobljen sav zrak koji je ispunjavao prostor u kojemu nije bila nafta na početku. Kada se otvori ventil u cijevi zanemariva volumena koja povezuje dna spremnika, nafta slobodno poteče. Odredite kolika je konačna razina nafte u drugom spremniku.

Pretpostavite da je početni tlak plina u drugom spremniku jednak jednoj atmosferi te da nafta dovoljno sporo teče da možemo uzeti da se temperatura tog plina ne mijenja. Pretpostavite još i da je gustoća nafte konstantna te iznosi 800 kg/m^3 .

Rješenje:

U konačnom stanju nafta ne teče, tako da će ukupni statički tlakovi u jednom i drugom spremniku morati biti jednaki. U prvom spremniku imamo hidrostatski tlak stupca nafte te atmosferski tlak, dok u drugom imamo tlak sada komprimiranog plina zajedno s hidrostatskim tlakom nafte. **(1 bod za ispravno razmatranje konačnog stanja i tlakova.)** Uzimajući u obzir naputak da se radi o izotermnog promjerna, tlak toga plina je **(1 bod za ispravno korištenje formula za izotermnu promjenu. 1 bod za ispravan konačni izraz za tlak plina.)**

$$p_{\text{plin, kon}} = p_{\text{plin, poč}} \frac{V_{\text{plin, poč}}}{V_{\text{plin, kon}}} = p_{\text{plin, poč}} \frac{h_{\text{uk}} - h_{\text{poč}}}{h_{\text{uk}} - h_{\text{kon}}},$$

pri čemu smo prvo iskoristili Boyle-Mariotteov zakon, a potom pokratali površinu baze cilindra te označili kupnu visinu cilindra s h_{uk} , visinu nafte u drugom spremniku u početku s $h_{\text{poč}}$ te konačnu visinu nafte u istom s h_{kon} . Ako zapišemo prethodni zaključak o tlaku u obliku jednadžbe imamo **(2 boda ukupno za točan izraz za konačne tlakove: 1 bod uskratiti ako je zaboravljen doprinos atmosferskog tlaka, uskratiti oba boda ako nije uračunat doprinos plina u drugom spremniku.)**

$$p_{\text{atm}} + \rho g L_{\text{kon}} = p_{\text{plin, kon}} + \rho g h_{\text{kon}},$$

pri čemu smo s L označili visinu nafte u prvom spremniku. S obzirom na to da su tekućine nestlačive, ukupna količina nafte u početku i na kraju pretakanja mora biti jednaka, odnosno, kako su cilindri identični, visine stupaca nafte se moraju poklapati

$$L_{\text{kon}} + h_{\text{kon}} = L_{\text{poč}} + h_{\text{poč}} = h_{\text{uk}},$$

pri čemu smo primijetili da je ukupna visina prvog i drugog stupca nafte jednaka 10 metara, što točno odgovara visini spremnika. **(1 bod za ispravan zaključak o tome da ukupni volumen nafte mora biti očuvan.)**

Kombinirajući prethodno izvedene jednadžbe dobivamo sljedeći izraz

$$p_{\text{atm}} + \rho g (L_{\text{kon}} - h_{\text{kon}}) = p_{\text{atm}} \frac{h_{\text{uk}} - h_{\text{poč}}}{h_{\text{uk}} - h_{\text{kon}}}.$$

Uzmemo li u obzir zaključak o odnosu visina nafte te podijelimo li sve s atmosferskim tlakom imamo **(1 bod za ispravnu kombinaciju prethodnih jednadžbi)**

$$1 + \frac{\rho g}{p_{\text{atm}}} (h_{\text{uk}} - 2h_{\text{kon}}) = \frac{h_{\text{uk}} - h_{\text{poč}}}{h_{\text{uk}} - h_{\text{kon}}}.$$

Sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu **(1 bod za uspješno sređen izraz)**

$$2 \frac{\rho g}{p_{\text{atm}}} h_{\text{kon}}^2 - \left(3 \frac{\rho g}{p_{\text{atm}}} h_{\text{uk}} + 1 \right) h_{\text{kon}} + h_{\text{poč}} + \frac{\rho g}{p_{\text{atm}}} h_{\text{uk}}^2 = 0.$$

Uvrstimo li brojeve dane u zadatku dobivamo dva pozitivna korijena, od kojih biramo manji, jer je drugi veći od ukupne visine spremnika. **(1 bod za točno odabran korijen.)** Konačna visina nafte u drugom spremniku je tada 3.071 metara. **(1 bod za točnu konačnu visinu.)**

Zadatak 5. (ukupno bodova: 12)

U demonstracijskom pokusu, komoru s pomičnim klipom površine poprečnog presjeka 100 cm^2 i početnog volumena od jedne litre ispunimo idealnim plinom temperature 20 stupnjeva Celzijevih i atmosferskog tlaka. Na početku pokusa upali se plamenik ispod komore te se termodinamička temperatura plina poveća za 50% , pri čemu se klip drži fiksnim. Potom, s još uvijek upaljenim plamenikom, klip se pusti u gibanje tako da sila na njega ostaje konstantnom tijekom cijelog gibanja. Klip se zaustavi kada se volumen plina udvostruči. Konačno, otvori se ventil na komori te čestice plina izlaze iz komore sve dok se tlak u njoj ne izjednači s atmosferskim. Plamenik osigurava da se temperatura plina koji preostaje u komori u tom posljednjem koraku ne mijenja.

Odredite koliki je rad kojega je plin izvršio na klip te koliki je omjer broja čestica plina koje se nalaze u komori na početku i na kraju pokusa. Dodatno, odredite i kolika je konačna temperatura plina. Pretpostavite da se klip giba horizontalno bez trenja te da se površina njegova poprečnog presjeka ne mijenja.

Rješenje:

Prvi proces kroz kojega plin prolazi je izohorno zagrijavanje te tada vrijedi **(1 bod za rješenje izohornog procesa, bilo manipulacijom jednadžbe stanja, bilo direktnim korištenjem Charlesova zakona.)**

$$\frac{nRT_0}{p_0} = V_0 = V_1 = \frac{nRT_1}{p_1},$$

pri čemu je indeksima označeno početno stanje (0) i stanje nakon zagrijavanja (1). Po uvjetu zadatka, temperatura $T_1 = 1.5T_0$ **(1 bod za točnu temperaturu)** te je stoga $p_1 = p_0T_1/T_0 = 1.5p_0 = 1.5 \text{ atm}$. **(1 bod za točan tlak.)**

Drugi proces je izobarna ekspanzija, pri kojemu se klip pomakne tako da se ukupni volumen udvostruči. Stanje plina na kraju ove ekspanzije je $p_2 = p_1 = 1.5p_0$, $V_2 = 2V_1 = 2V_0$ te $T_2 = T_1V_2/V_1 = 2T_1 = 3T_0$. **(1 bod za rješenje izobarnog procesa, bilo manipulacijom jednadžbe stanja, bilo direktnim korištenjem Gay-Lussacova zakona. Po 1 bod svaki ispravni iznos varijabla stanja plina na kraju procesa, sveukupno 3, priznati i rješenja koja su ostavljena u varijabilnom obliku kao što je to napravljeno ovdje.)**

To znači da se početna udaljenost klipa koja iznosi 10 cm , mjereno od suprotnog zida komore, (što se dobije dijeljenjem volumena komore i površine poprečnog presjeka klipa) poveća na 20 cm . **(1 bod za točan pomak klipa.)** Tada je rad kojega plin izvrši na klip jednak

$$\Delta W = F\Delta x = p_1 A \Delta x = 1.5 \text{ atm} \cdot 100 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} = 151.95 \text{ J}.$$

S obzirom da se zadnji proces odvija pri konstantnoj temperaturi, konačna temperatura plina koji je preostao u komori je $T_3 = T_2 = 3T_0 = 3(273.15 + 20) \text{ K} = 879.45 \text{ K}$. **(1 bod za točan rezultat za temperaturu.)** Konačni volumen čestica koje preostaju u komori jednak je $V_3 = 2V_0 = 2 \text{ L}$, a tlak iznosi jednu atmosferu, odnosno jednak je početnom. Sada možemo direktno izračunati traženi omjer koristeći jednadžbu stanja idealnog plina **(1 bod za ispravno zaključeno konačno stanje plina u usporedbi s početnim. 1 bod za poznavanje jednadžbe stanja idealnog plina. 1 bod za točno izračunati omjer.)**

$$\frac{n_3}{n_0} = \frac{p_3 V_3 / RT_3}{p_0 V_0 / RT_0} = \frac{p_0 2V_0 / R 3T_0}{p_0 V_0 / RT_0} = \frac{2}{3}.$$

Fizikalne konstante:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$p_{\text{atm}} = 1 \text{ atm} = 101300 \text{ Pa}$$

$$T_0 = -273.15 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$R = 8.314 \text{ J/Kmol}$$